DM n°4 : Maths financières – Corrigé

1) La suite (M_k) est une suite géométrique de raison $1+\frac{r}{12}$. Ainsi,

$$M_{12} = \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} M_0 = \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} S$$

tandis que $A_1 = (1+r)S$. Pour un taux $r = 10\%$ et $S > 0$ quelconque, on a donc

$$\frac{M_{12}}{A_1} = \frac{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}}{1+r} = \frac{\left(1+\frac{1}{120}\right)^{12}}{1+\frac{1}{10}} \approx \boxed{1,004} > 1$$

de sorte que le placement avec des intérêts annuels est plus avantageux.

2) La suite (I_k) est une suite géométrique de raison $1+\frac{r}{n}$ (indépendante de k !) de sorte que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$I_m = \left(1+\frac{r}{n}\right)^m I_0$$

si bien que ($n \in \mathbb{N}^*$ étant fixé)

$$\boxed{I_n = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n S}$$

3)

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$. On pose

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$$

Il suffit de montrer que f est négative. Tout d'abord, f est dérivable par somme et composée de telles fonctions. Ensuite,

$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x}$$

$$\begin{aligned}
& f'(x) > 0 \\
\iff & 1 - x - \frac{1}{1+x} > 0 \\
\iff & (1-x)(1+x) - 1 > 0 \qquad \text{car } 1+x > 0 \\
\iff & 1 - x^2 - 1 > 0 \\
\iff & -x^2 > 0
\end{aligned}$$

Finalement, f' est toujours négative. Ainsi, f est décroissante. En particulier, $f(x) \leq f(0) = 0$. D'où f est négative. On a donc montré la première inégalité. Pour la seconde, on étudie de même la fonction $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$, cf également le TD 07-08 exercice 8.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$I_n = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n S = e^{n\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)} S$$

Or, comme $\frac{r}{n} \in \mathbb{R}_+$, on a par la question précédente,

$$\frac{r}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{r}{n}\right) \leq \frac{r}{n}$$

et donc

$$r - \frac{r^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right) \leq r$$

Or, $r - \dfrac{r^2}{2n} \to r$: par le théorème d'encadrement, on a donc $n \ln\left(1 + \dfrac{r}{n}\right) \to r$. Ainsi, par composition,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = e^r S}$$

On a (avec $r = 10\%$),

$$\frac{\lim_{n\to+\infty} I_n}{M_{12}} = \frac{e^r}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}} \approx 1,0004$$

$$\frac{\lim_{n\to+\infty} I_n}{A_1} = \frac{e^r}{1+r} \approx 1,096$$

(Ainsi, avec un nombre “infini” d'échéances avec un taux d'intérêt “infinitésimal”, le placement est plus rentable qu'un placement avec des intérêts mensuels)

4) Il s'agit d'un problème de Cauchy, et donc il y a unicité de la solution. On remarque que $y(t) = e^{rt}S$ est une solution évidente de cette équation : c'est donc la seule solution.
Cherchons r tel que $y(1) = 2y(0)$. On a

$$\begin{aligned} y(1) = 2y(0) &\iff e^{r\times 1}S = 2S \\ &\iff e^r = 2 \\ &\iff r = \ln 2 \end{aligned}$$

De sorte qu'un taux $r = \ln 2 \approx 69\%$ *(donc avec un taux infinitésimal de 69%, on double la mise après un an. Si les intérêts étaient calculés sur un an, il faudrait un taux de 100%.)*

5) Résolvons $y' - r(1 + \alpha \sin(2\pi t))y = 0$. On pose

$$a(t) = -r(1 + \alpha \sin(2\pi t))$$

On remarque qu'une primitive de a est la fonction

$$t \mapsto -rt + \frac{\alpha r}{2\pi}\cos(2\pi t)$$

Les solutions de cette équation (homogène) sont donc les fonctions

$$y(t) = Ce^{rt - \frac{\alpha r}{2\pi}\cos(2\pi t)} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Enfin comme $y(0) = S$, on a

$$S = Ce^{-\frac{\alpha r}{2\pi}}$$

de sorte que $C = Se^{\frac{\alpha r}{2\pi}}$. Finalement, la solution du problème de Cauchy est

$$\begin{aligned} y(t) &= Se^{\frac{\alpha r}{2\pi}} e^{rt - \frac{\alpha r}{2\pi}\cos(2\pi t)} \\ &= \boxed{Se^{rt}e^{\frac{\alpha r}{2\pi}(1-\cos(2\pi t))}} \end{aligned}$$

Cherchons pour quelle valeur de r est-ce que $y(1) = 2y(0)$.

$$\begin{aligned} y(1) = 2y(0) &\iff Se^r e^{\frac{\alpha r}{2\pi}(1-\cos(2\pi))} = 2S \\ &\iff e^r e^{\frac{\alpha r}{2\pi}(1-1)} = 2 \\ &\iff e^r = 2 \end{aligned}$$

On trouve à nouveau $r = \ln 2$. La valeur de α n'a donc aucune influence sur le résultat. *(Cependant, la valeur de α influe sur la valeur de $y(t_0)$ pour tout $t_0 \in]0, 1[$...)*

6) Soit y la solution de $\begin{cases} y' = \overline{r}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$y'(t) = \frac{r}{y(t)^2}y(t) = \frac{r}{y(t)}$$

D'où $y(t)y'(t) = r$. En intégrant cette égalité entre 0 et un réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^x y(t)y'(t)\,dt = \int_0^x r\,dt \\
\Longrightarrow\ &\left[\frac{1}{2}y(t)^2\right]_0^x = [rt]_0^x \\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{2}y(x)^2 - \frac{1}{2}y(0)^2 = rx \\
\Longrightarrow\ &y(x)^2 = 2rx + S^2 \\
\Longrightarrow\ &y(x) = \sqrt{2rx + S^2} \qquad \text{car } y(x) > 0 \text{ par hypothèse}
\end{aligned}$$

Par unicité, l'unique solution de ce problème est donc $\boxed{y(x) = \sqrt{2rx + S^2}}$.
Enfin,

$$\begin{aligned}
&y(1) = 2y(0) \\
\Longleftrightarrow\ &\sqrt{2r + S^2} = 2S \\
\Longleftrightarrow\ &2r + S^2 = 4S^2 \qquad \text{car } 2r + S^2 > 0 \quad \text{et} \quad S > 0 \\
\Longleftrightarrow\ &2r = 3S^2 \\
\Longleftrightarrow\ &\boxed{r = \frac{3}{2}S^2}
\end{aligned}$$

(Si la somme S de départ est "élevée", il faut donc un taux bien plus élevé encore pour doubler la somme totale en 1 an)